

# 最適化手法を取入れた不静定構造物の設計法\*

鳥居 邦夫\*\* 額谷 仁博\*\*\*

## A Optimum Designing Method of a statically Indeterminate Structure

Torii KUNIO, Nukatani HITOHIRO

Member stresses of a statically indeterminate structure are affected by its stiffness distribution which can not be not determined at the beginning of designing. For this reason several times trial calculations must be done before completion of designing.

If enough numbers of redundant forces can be suitably selected, all the member forces are fixed, and eventually the stiffness distribution is also settled. But as the magnitudes of these redundant forces are arbitrary chosen, the geometrical compatibilities are not satisfied. To fulfil these conditions prestresses are to be introduced into the structure. If the method of prestressing were difficult one, this idea would be in vain, but by means that the dimensions or curvatures of members are changed as much as designated previously, needed prestresses are easily and automatically introduced. This process is especially easy on the case that the structure is made of steel.

When this method is adopted, optimization can be attained without any increase of calculation time, and cost of fabrication will be not more than those of ordinary method. These advantages are remarkable when the loads do not move, but considerable calculation time are needed as yet against moving loads. This defect must be improved hereafter.

### 1. 諸 言

不静定構造物は、不静定次数に見合った適合条件を設けることにより、応力状態が定まる。従来行なわれて来た設計法では、幾何学的形状を構造物が保持することにその条件を求めている。この計算過程の中へ最適化手法を持ち込んだ代表的なものは SUMT 手法による計算法<sup>1)2)</sup>ある。幾何条件を適合条件に選ぶ場合には、剛性の分布と応力分布とが互いに影響し合うことから、繰返し計算が不可欠となって来る。また、最適値として選ばれた構造のすべての部分が、必ずしもフルストレス状態にあるとは限らず<sup>3)</sup>、これを解決する方法は全くない。

著者等は、この適合条件の設定の仕方に検討を加え、この条件を緩めることにより、更に最適断面を追求し得るようにし、その不適合分をプレストレインの形で予め製作時に考慮しておくことで、条件を満たそうとした。また、この方法を採用することにより繰返し計算の鎖を断ち切ろうと試みるものである。

### 2. 設計法に関する理論

#### 2.1 既往設計法との比較

C. Fleury 等は<sup>3)</sup>、図-1 に示すようなトラスを例にとって、最適設計が、フルストレス状態になるとは限らないことを明らかにしている。本設計法を用いると、このような場合でも全部材をフルストレス状態とすることができ、従って更に経済的な構造物が得られることを以下に示そう。

このトラスは1次の不静定構造物であるから、3部材の軸力は真中の垂直材にかかる軸力を不静定 X とすると、次のように表わすことができる。

$$\begin{cases} T_1 = P - X/\sqrt{2} \\ T_2 = X \\ T_3 = -X/\sqrt{2} \end{cases} \quad (1)$$

ここで、この X を定めれば  $T_1 \sim T_3$  はすべて決まることになるが、従来の設計法では、これを定めるために、トラスの幾何的形狀から来る適合条件式を用いる。仮想仕事の原理を適用すると、この条件式は

$$\frac{\partial}{\partial X} \sum_{i=1}^3 \frac{T_i^2 l_i}{EA_i} = 0 \quad (2)$$

\*原稿受付 昭和58年4月5日

\*\*長岡技術科大学(長岡市上富岡町字長峰1603-1)

\*\*\*石川島播磨重工業株式会社

E: ヤング係数

 $A_i$ : 部材断面積

となる。ここで厄介なのは、最終的に求めなければならない  $A_i$  が条件式中に入ってきていることである。このために繰返し計算が必要となる。またこれを解決するために、様々の最適化手法が駆使されることにもなるわけである。

ここに述べる設計法では、この幾何学的条件を一時棚上げにし、最適値問題で使用する目的函数を持ち出すのである。この目的函数にどのようなものを持ち出すかは、いろいろ議論のあるところであるが、ここでは話の筋道を説明するのが目的であるから、最小重量を目的とすることにする。すると

$$I = \sum_{i=1}^3 A_i l_i = \sum |T_i| l_i / \sigma_{ai}$$

 $\sigma_{ai}$ : 許容応力度

となる。ここで更に単純化して  $\sigma_{ai}$  を一定とし、 $T_i$  の絶対値をとる代わりに、 $T_i^2$  を採用する。このことは、広く最小二乗法が使用されていることを見れば、妥当な変換と云えよう。かくして、目的函数は

$$I = \sum_{i=1}^3 T_i^2 l_i \quad (3)$$

となる。これを極小ならしめるための  $X_i$  は、

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (T_i^2 l_i) = 0 \quad (4)$$

より求めることができる。この式と(2)式を比較すると、(2)式で面倒を起した分母の  $EA_i$  がちょうど脱け落ちた形になっているのが興味深い。即ち、等断面を仮定した場合の適合条件式となっている。この事は重要な意味を持つが、詳しくは後述することにする。

さて、このようにして得られた不静定力は、

$$X_p = (\sqrt{2} - 1) P \quad (5)$$

となり、これに対応する部材軸力はそれぞれ、

$$\begin{cases} T_1 = P/\sqrt{2} \\ T_2 = (\sqrt{2} - 1) P \\ T_3 = -(1 - 1/\sqrt{2}) P \end{cases} \quad (6)$$

となる。

これに耐え得る最小断面は、

$$\begin{cases} A_1 = P/(\sqrt{2} \cdot \sigma_a) \\ A_2 = (\sqrt{2} - 1) P/\sigma_a \\ A_3 = (1 - 1/\sqrt{2}) P/\sigma_a \end{cases} \quad (7)$$

 $\sigma_a$ : 許容応力度

となって C. Fleury 等の示す結果より約10%程度重量を

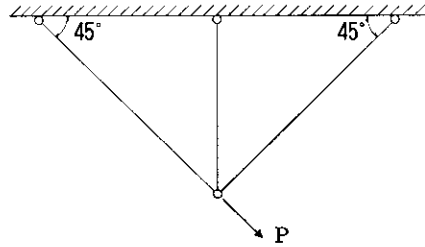


図 1

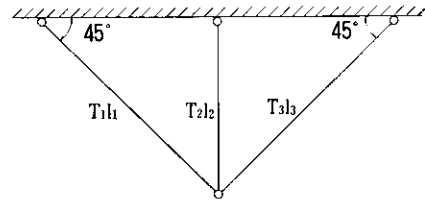


図 2

節約できることが確かめられる。

ただし、ここで得られた不静定力は、幾何的な適合条件を満たしていない。そこで、得られた断面を(2)式に代入して得られる部材力を計算すると次式のようになる。

$$\begin{cases} T_1^* = (2\sqrt{2} - 2) P \\ T_2^* = (3\sqrt{2} - 4) P \\ T_3^* = -(3 - 2\sqrt{2}) P \end{cases} \quad (8)$$

(6)式と(8)式の差をとると、

$$\begin{cases} T_1 - T_1^* = -(3\sqrt{2} - 4) / 2 \cdot P \\ T_2 - T_2^* = (3 - 2\sqrt{2}) P \\ T_3 - T_3^* = -(3\sqrt{2} - 4) / 2 \cdot P \end{cases} \quad (9)$$

となり、これだけの不適合量が出る。これを解決するために、(9)式に見合っただけのプレストレスを導入してやる。その方法は簡単で、(8)式のプレストレスに対応した各部材の伸び、あるいは縮み分だけの長さを変えて製作しておけばよい。その量は  $(T_i - T_i^*) l_i / A \cdot E$  だから

$$\begin{cases} \Delta l_1 = -\frac{\sigma_a \cdot l_1}{E} \cdot (3 - 2\sqrt{2}) \\ \Delta l_2 = \frac{\sigma_a \cdot l_2}{E} \cdot (\sqrt{2} - 1) \\ \Delta l_3 = -\frac{\sigma_a \cdot l_3}{E} \cdot (\sqrt{2} - 1) / 4 \end{cases} \quad (10)$$

で表わされる。この  $\Delta l_i$  の符号は、ちぢめるときに正の値となり、伸ばすときには負の値をとる。(9)式のプレストレス量のベクトル和をとると0となるから、(10)式の長さだけの長さを変化させた部材を、むりやりに組立てるとちょうど(9)式のプレストレスが入って外的に釣合うわけである。

しかし、ここに一つの懸念が残る。すなわち、(9)式で

表わされるプレストレス量だけで、その材料の許容応力度を超過してしまうかも知れない。これは実際に起り得るから、これに対する照査は不可欠である。ただし、目的関数の性質上、その解はなるべく等断面に近い断面分布になろうとする。ここで、不静定力を決定する(4)式が等断面の構造物の適合条件式になっていることを想起すれば、その不適合量がさほど大きい値をとる事はないと結論することができる。つまりやり直しの確率は非常に小さいといえることができる。

さらに注目すべきことは、これで設計が終わり、繰返し計算の必要が一切ないことである。通常は、適当に断面を仮定し(等断面から始まることが多い)、断面力を計算して、これに見合った断面を決定するが、この断面分布では、断面力が変化してしまうから、そこに繰返し計算の手間が必要となって来る。ここでは、そのループの鎖がみごとに断ち切られている。ここに述べる設計法を用いると、簡単に最適断面を得ることができ、しかも繰返し計算を必要としない。少ない手間で良い結果が得られるというわけである。

## 2.2 設計法に関する一般論

前節では簡単なトラスを例にとり、本方法と従来の方法の比較を行なった。ここでは、ここに述べる方法の一般論について述べることにする。

静定構造物は、その形状が与えられれば、応力状態は一意的に定まり、そこに最適設計の入る余地はない。静定構造物ではその形状を最適値問題の対象とする他はない。ここでは、形状は何等かの制約条件から既に定まっており、変更の余地はないとして論を進める。

不静定構造物の拘束を適当に取り去って出来る静定基本系の部材応力は次式のようになる。

$$N_{det \cdot i}(x) = \sum_{j=1}^m \int_s N_{inf \cdot i \cdot j}(x, s) \cdot P_j(x, s) ds \quad (11)$$

$N_{inf \cdot i \cdot j}(x, s)$  : 静定基本系の影響線

$P_j(x, s)$  : 荷重強度

$i$  : 部材応力の種類を表わす

$j$  : 荷重の種類を表わす

$m$  : 部材応力および荷重の種類の数

$x$  : 着目点(部材上の任意点から部材に沿って測る)

$s$  : 荷重の作用点(測り方は  $x$  に同じ)

$N_{inf \cdot i \cdot j}$  が着目点と作用点の関数であるのは当然であるが、 $P_j$  も着目点の影響を受けるのは、部材応力を計算するとき、最も危険なように荷重を載荷するためである。

不静定構造物の部材応力は  $N_{det \cdot i}$  に不静定力  $X_k$  による応力を加え合わせたものであるから

$$N_i(x) = N_{det \cdot i}(x) + \sum_{k=1}^n N_{inf \cdot i \cdot jk}(x, z_{0 \cdot k}) X_k(x) \quad (12)$$

$X_k$  : 不静定力

$z_{0 \cdot k}$  : 不静定力の作用点

$jk$  :  $k$  番目の不静定力の種類

で計算できる。これに含まれる  $X_k$  は自由に選べるわけではなく、次のような制約を受ける。

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \int_s \frac{1}{E f_i(s)} N_{inf \cdot j \cdot i}(s, z_{0i}) \cdot N_{inf \cdot j \cdot jk}(s, z_{0 \cdot j})$$

$$ds \cdot X_k(x) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \int_s \int_z \frac{1}{E f_i(s)} N_{inf \cdot k \cdot i}(s, z_{0i}) \cdot$$

$$N_{inf \cdot k \cdot j}(s, z) \cdot p_j(x, z) dz \cdot ds = \mu_i \quad (13)$$

$\mu_i$  :  $x$  によらない独立変数でプレストレインを表わす。

上式中の  $\mu_i$  が従来の設計と異なるところで、従来ではこの  $\mu_i$  を 0 とおいているため、条件が厳しくなるのである。

さらに設計を行なうまで目的とする関数が必要となる。この関数は設計者の意図により、それぞれ異なるものであるが、これをまとめると次式のように表わすことができる。

$$I = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_x (N_i(x))^2 dx \quad (14)$$

$\alpha_i$  : 設計者の意図により決まる重み係数

(14)式を、(13)式の制約の下に最小ならしめるのが構造物の設計であるといえるのであるが、これを言い換えると、設計とは、(13)式を付帯条件とし、(14)を汎関数とする変分問題であるということになる。この変分問題における変関数は、不静定力  $X_k$  と一般剛性  $f_j$  であり、独立変数は  $x$  と  $\mu_i$  なる。 $\mu_i$  に関する積分をその中に含まない点が一般の変分問題と異なる点である。

ここにラグランジュの乗数を持ち込めば、式(13)の付帯条件はなくなり、次式で表わされる汎関数を最小ならしめるよう努力すればよい。

$$I = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_x (N_i(x))^2 dx$$

$$+ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \int_s \frac{1}{E f_i(s)} N_{inf \cdot j \cdot i}(s, z_{0i}) \cdot N_{inf \cdot j \cdot jk}(s, z_{0j}) ds X_k(x) \right]$$

$$(z, z_{0j}) ds X_k(x)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \int_s \int_x \frac{1}{EJ_i(s)} N_{inf \cdot jk \cdot i}(s, x) \cdot N_{inf \cdot k \cdot j}(s, z) p_j(x, z) ds dz - \mu_i \} \quad (15)$$

$\lambda_i$ : ラグランジュの乗数

厳密には  $p_j$  の載荷状態は  $J_k$ ,  $X_k$  を相互に影響を及ぼし合うので, これも変函数として取り扱うべきであるが, これをその通りに実行すると問題を著しく複雑にする。そこで, 先に述べた如く, 断面配置は一定に近づく傾向があり, さらにプレストレス量がさして大きくないことを勘案すると, たとえば等断面でプレストレスのない場合の載荷状態に固定することにすれば,  $p_j$  は  $x$  と  $s$  を独立変数に持つ既知の函数とすることができ, これを変函数のリストから取り除くことができる。また, プレストレス量と断面配置が大きく変る場合には, これらが決まった段階で  $p_j$  の載荷状態を照査することにするのも一つの方法である。この場合でも断面配置に関しては, これがすべて積分されてしまうので, かなり極端な変化に対しても, その反応は鈍感であるから, これによる手戻りは殆んどないと考えられる。

### 2.3 固定荷重に対する設計法

2.1 の例でのべたような, 荷重が固定している場合の設計は, このプレストレスを導入する方法をとると一気に簡単なものとなる。前節で述べた  $p_j(x, s)$  は, 着目点と作用点の函数であるが, 荷重を固定すると, 着目点の座標である  $p_i(s)$  とは無関係となり, となる。すると, (12) 式より  $N_i(x)$  の中に含まれる未知の要素は  $X_k$  だけとなる。これがループの鎖を断つ鍵となっているのである。すなわち,  $N_i$  は (12) 式の制約の影響を受けることなく自由に  $X_k$  を選ぶことにより決定でき, ここで選んだ  $X_k$  を (12) 式に代入し,  $J_{jk}$  と  $\mu_i$  を適当に決めてやることによってこの条件式を満足させることもまた可能となる。ここで, (12) 式の右辺を 0 とせず,  $\mu_i$  とした理由がはっきりして来る。つまり,  $\mu_i$  を定数にすると (12) 式から  $J_k$  が一意的に定まってしまう, 最適化の余地がなくなってしまう。そこで  $\mu_i$  を変化させることによってその余裕をじさせたという解釈をすることができるのである。

$X_k$  を分離独立させることに成功すると, 目的函数はラグランジュの乗数を含んだ複雑な (12) 式を用いる必要はなく, (14) 式を用いてこれを  $X_k$  で偏微分し, これを 0 とおく。

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \int \frac{\partial N_i}{\partial X_k} \cdot N_i \cdot dx = 0 \quad (16)$$

これは不静定力の数だけ得られるから, これを解けば,

$X_k$  の最適値が得られ, これに応じた断面設計を行なった後 (13) 式によってプレストレン量が算出される順序となる。このプレストレンを導入するのは至極簡単であり, 構造部材製作の工数を上げることは全くない。部材長を変え, 製作キャンパを変え, スプライス穴群に傾きを与えるだけでよいからである。これらは設計計算時にその値を計算し, 図面に表示しておけるものばかりである。したがってこの方法を採れば, 計算が著しく簡単になったメリットだけが残ることになる。その計算に必要なものは, 静定系の影響線と不静定次数だけの連立一次方程式を解くことと, これらを用いてプレストレスを決めることだけである。

### 2.4 移動荷重を含む場合の設計法

移動荷重を取り扱うケースは, 構造物全体から見れば, 稀な部類に入るであろう。橋梁がこれに相当するが長大吊橋, 長大アーチ等は影響線が使用できないために荷重を固定化せざるを得ない。長大橋が固定荷重で設計されているにも拘らず, 計算できるという理由だけで移動荷重をとり扱うのは筋の通らない話であるが, 現行示方書がそうになっている以上, これに従って設計するのは止むを得ないことであろう。

この場合の計算法はかなり厄介で, 現在行なわれている計算に要する手間と大差はない。ラグランジュの乗数の入った (12) 式を直接解くよりも, 以下に述べるようなまわり道をした方が, 汎用性のあるプログラミングが容易である。(12) 式は  $n$  個の  $X$  に着目すると, これらに関する  $n$  元連立一次方程式になっているから,  $X_k$  について解いた形で表わせる。

$$X_k = \int f_k \left( \frac{1}{EJ_1(t)}, \dots, \frac{1}{EJ_m(t)}, \mu_1, \dots, \mu_n, x \right) dt \quad (17)$$

但しここに含まれる  $EJ_i(t)$  は未知の函数であるから,  $s$  に関する積分を実行することはできない。そこで, 一般剛性の逆数  $1/EJ_i(t)$  を次式のように置く。

$$1/EJ_i = \sum_{p=0}^{m_p} \beta_p t^p \quad (18)$$

このように置くと, 影響線はすべて 1 次式であるから  $s$  に関する積分はすべて可能となり, (16) 式は

$$X_k = F_k(\beta_1, \dots, \beta_{np}, \mu_1, \dots, \mu_n, x), n_p = \sum m_p \quad (19)$$

の形で解くことができる。これと, (12) 式とを (14) 式に代入すると,

$$I = \sum_{i=1}^m \int_x (N_{det \cdot j}(x) + \sum_{k=1}^n N_{inf \cdot i \cdot jk}(x, z_{ok}) \cdot F_k)^2 dx \quad (20)$$

の形で目的関数が書き換えられる。即ち変分問題にガラーキン法を持ち込んだわけである。この手法によると、(19)式を  $\beta_1 \sim \beta_{np}$  および  $\mu_1 \sim \mu_n$  で偏微分してこれを 0 とおき、必要な数だけの微分方程式を作る。

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \int \{N_{det \cdot i \cdot j}(x) + \sum_{k=1}^n N_{inf \cdot i \cdot jk}(x, z_{0k}) F_k\} \cdot \\ \sum_{k=1}^n N_{inf \cdot i \cdot jk}(x, z_{0k}) \frac{\partial F_k}{\partial \beta_{q\beta}} dx = 0, q\beta = 1 \sim mp \\ \sum_{i=1}^m \int \{N_{det \cdot i \cdot j}(x) + \sum_{k=1}^n N_{inf \cdot i \cdot jk}(x, z_{0k}) \cdot F_k\} \cdot \\ \sum_{k=1}^n N_{inf \cdot i \cdot jk}(x, z_{0k}) \frac{\partial F_k}{\partial \mu_{q\mu}} dx = 0, q\mu = 1 \sim n \end{cases} \quad (19)$$

これを解けば、プレストレス量、不静定力、断面比等が算出されたことになっている。

### 3. 数値計値例

この報告は、新しい設計手法を示すことにあり、最適化計算を行なった結果の分析を行なったことを報告するのは目的外であるので、2 径間続桁にこの方法を適用した例のみを掲げたい。

先ず等分布荷重のみを全載する場合（固定荷重）について述べることにする。

目的関数は曲げのみについて考えればじゅうぶんであるから

$$I = \int_0^l M^2 dx = \int_0^l \left[ wl^2 \left\{ \left( \frac{x}{l} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right\} - \frac{x}{2} X \right]^2 dx \quad (20)$$

X : 中間支点反力

l : 支間

w : 荷重強度

M : 曲げモーメント

とした。変数を無次元化するために全体を  $wl^4$  で除し、 $X/wl$  を  $\chi$ ,  $x/l$  を  $\xi$  で表わすことにする。更にこれを  $\chi$  で偏微分して 0 とおいた結果が次式である

$$\int_0^1 (2\xi - \xi^2 - \xi \cdot \chi) \xi d\xi = 0 \quad (21)$$

積分を実行し、 $\chi$  について解くと

$$\chi = 1.2500 \quad (22)$$

が得られる。この反力による曲げモーメントは図-3 のとおりである。これに耐え得る断面を設計し、得られた断面を使用した場合に(22)が成立するようなプレストレス量を計算すると、断面配置の仕方により多少異なるが、

$$\chi_{pr} \approx 0.1 \quad (23)$$

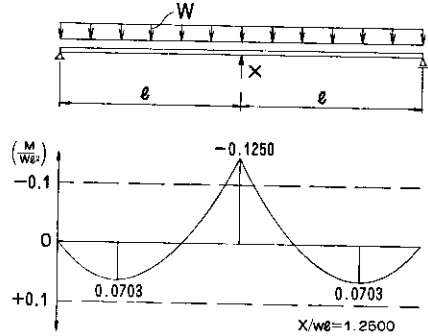


図 3

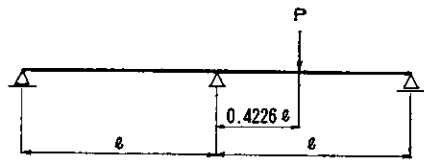


図 4

程度となり、プレストレスの非常に小さい値付近に最適値が存在することがわかる。

次に移動荷重として、集中荷重をかけた場合の結果を示す。

曲げモーメントを最大にするよう载荷するから、正のモーメントは着目点に载荷して計算する。一方、負のモーメントが最大となる载荷位置は、中間支点より見て

$$s = 0.4226 l$$

の点である。正のモーメントと負のモーメントの 2 乗和を目的関数にとると

$$I = \int_0^1 \left\{ P \cdot \xi \left( 1 - \frac{\xi}{2} \right) - \frac{X_p}{2} \xi \right\}^2 d\xi + \int_0^1 \left\{ P \cdot \xi \left( \frac{1-\alpha}{2} \right) - \frac{X_n}{2} \xi \right\}^2 d\xi \quad (24)$$

で表わされる。一方拘束条件は、正負それぞれに対し、

$$\begin{cases} P(2-\xi) \int_0^x \frac{t^2}{4EI} dt + P \cdot \xi \int_x^1 \frac{t(2l-t)}{4EI} dt \\ + P \cdot \xi \int_0^1 \frac{t^2}{4EI} dt - X_p \int_0^1 \frac{t^2}{2EI} dt = \mu \\ P(1-\alpha) \int_0^1 \frac{t^2}{4EI} dt + P(1+\alpha) \int_0^{(1-\alpha)l} \frac{t^2}{4EI} dt \\ + P(1-\alpha) \int_{(1-\alpha)l}^1 \frac{t(2l-t)}{4EI} dt - X_n \int_0^1 \frac{t^2}{2EI} dt = \mu \end{cases} \quad (25)$$

$X_p$  : 正の曲げモーメントに対応する支点反力

$X_n$  : 負の 同 上

ここで  $1/EI$  の分布状態を次のような 3 次式で近似する.

$$1/EI = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 \quad (26)$$

但し, 第 1 径間と第 2 径間では同じ分布をとるものとする. 以下の計算はかなり煩雑である上, その筋道は一般理論で示したとおりであるから省略する.

得られた曲げモーメントダイアグラムは図-5 のとおりである. このときのプレストレスとして導入される支点反力は  $0.1615P$  であり, 最大支点反力の約 32% である. これにより鋼重は約 7% 程度の節約が可能であると予想される. 実際の設計に当っては, 荷重の種類が複数となるため, その計算はさらに複雑となる. しかし, 繰り返し計算の鎖を断ち切れたことは, かなりの効果をもたらすものと考えられる.

#### 4. 結 言

不静定構造物は不静定反力が求められると, その部材応力が一意的に決定されることに着目した新しい設計法を示した. すなわち, 不静定力の函数 (または汎函数) として目的函数を設定する. これを最小ならしめる不静定力を決定して部材応力を求める. 幾何的条件は, 断面剛性をその中に含むから, 得られた断面の下での不適合

量を計算し, これをキャンセルするプレストレスが入るよう部材を製作しておくことにする. この方法を取ることで, 断面剛性と部材応力とが互いに影響を及ぼし合うことが原因となって起きるループの輪を切断することに成功した.

移動荷重の場合には着目点位置の函数となるため, その計算がかなり煩雑なものとなる. この点を改良して実用的なものとするのが今後の課題として残される.

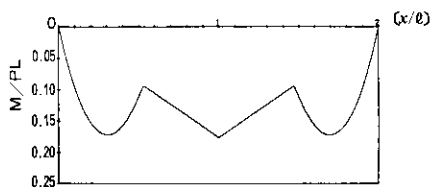


図 5

#### 参考文献

- 1) 樋口道之助ほか, JSSC, Vol17, No66 (1971) SUMT による構造の最適設計について
- 2) 樋口道之助ほか, 最適化手法の構造設計・解析への応用, 培風館
- 3) Fleury, C, ASCE (Structural/Oivision) May, 1980 Primal and Dual Methods in Structural Optimization P1117